ホップガロア拡大とII_1型部分因子環 (作用素環における量子解析の展開)

増岡, 彰

数理解析研究所講究録 1354 巻 2004 年 35-52

ホップガロア拡大とII_1型部分因子環

筑波大学数学系　増岡 彰 (Akira Masuoka)
Institute of Mathematics
University of Tsukuba

Ocneanuがその驚くべき洞察力を以て予見し，Longo, Szymański らが証明したように，有限指数depth 2の既約なII_1型部分因子環 $Q \subset P$ の共役類全体と有限次元Kac代数（等しく，有限次元C^*ホップ代数）$\mathcal{H}$ の同型類全体とは1対1に対応する．しかし，$Q \subset P$ 又は $\mathcal{H}$ が与えられたとき，その対応物を具体的な形で示すのは一般に非常に難しい．最近出版された Izumi-Kosaki [IK, 2002] は特殊な場合，正確には $\mathcal{H}$ が Kac代数拡大 $\hat{G} \rightarrowtail \mathcal{H} \twoheadrightarrow \mathbb{C}F$（$\mathbb{C}F$ は有限群 F の群環，$\hat{G} = \ell^\infty(G)$ は有限群 G の双対群環）として表せる場合に，この対応を大変具体的な形で与えている．現在知られている有限次元Kac代数の殆んどが上のような拡大の形をしていることを考えると，これはとても重要な結果である．ただ，[IK] において定義されているコホモロジーは，G.I. Kac [K, 1968]

により定義されたものに本質的に一致し，それは近年主にホップ代数の分野で筆者[M1, 2003]らにより研究されている．この小文では[M2, 2003]に基き，[IK, Chapters 2,3,5]の内容を，[M1]のホモロジー代数とホップガロアの視点を用い，やゝ一般的な形で説明する．細部にこだわらずアイデアが伝わるよう努めたい．

用語・記法につき，（ホップ）代数と作用素環の分野間でまま相違がある．例えば，群とその環への作用から作られる環を，(a) 2コサイクルなしの場合，代数では半直積又はスマッシュ積，作用素環では接合積と呼び，(b) 2コサイクルありの場合，それぞれ接合積，捻り接合積と呼ぶように．以下では，作用素環サイドの[IK]に極力倣う．また，

$$\mathcal{R} = \text{近似有限 } \mathrm{II}_1 \text{ 型因子環}$$

とし，次のように書く．

$$\mathbb{U} = \mathcal{R}\text{のユニタリ元全体がなす群}$$

$$\mathbb{T} = \mathbb{U}\text{の中心} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

§1. Jonesによる有限群作用の分類

次のセクションで述べる主結果は，Jones [J]の博士論文からのある結果に大きく依っている．それを[IK]の方針に沿う形で述べよう．

Γを有限群とする．ΓのRへの捻り(ひね)作用とは，写像α: $\Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}(R)$であって，自然な射影$\pi$: $\mathrm{Aut}(R) \longrightarrow \mathrm{Out}(R) := \mathrm{Aut}(R)/\mathrm{Int}(R)$との合成

$$\pi\alpha : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Out}(R)$$

が群準同型なるものをいう．この合成がさらに単射のとき，捻り作用αを外部的という．2つの捻り作用$\Gamma \overset{\alpha}{\underset{\alpha'}{\rightrightarrows}} \mathrm{Aut}(R)$が外部共役とは，付随する2つの群準同型$\Gamma \rightrightarrows \mathrm{Out}(R)$が共役，すなわち$\theta \in \mathrm{Aut}(R)$, $u \in \mathbb{U}$が存在して

$$\theta\alpha'\theta^{-1} = \mathrm{Ad}(u)\alpha$$

が成立つことをいう．ここに$\mathrm{Ad}(u) = u \cdot u^{-1}$（内部自己同型）．

Jones [J] は，

$$\mathrm{Out}(\Gamma, R) := \{\text{外部的捻り作用 } \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}(R)\}$$

の外部共役類を決定した：

定理J. 次の全単射が存在する．

$$\mathrm{Obs} : \mathrm{Out}(\Gamma, R)/\text{外部共役} \xrightarrow{\cong} H^3(\Gamma, \mathbb{T})$$

ここに，$H^3(\Gamma, \mathbb{T})$は自明な$\mathbb{Z}\Gamma$加群$\mathbb{T}$を係数域とするΓの第3コホモロジー群を表す．写像Obs自体は中心的代数Rに対し古くから知られている．これを記述するためα: $\Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}(R)$を（外部的）捻り作用とする．$\pi\alpha$は群準同

型だから，ある写像 $u : \Gamma\times\Gamma \longrightarrow \mathbb{U}$ が存在して

(1) $$\alpha_g\alpha_h = \mathrm{Ad}(u(g,h))\alpha_{gh} \quad (g,h\in\Gamma)$$

を満す．$\mathbb{U}$ は非可換ゆえ現実には加群でないが，あたかも α により $\mathbb{Z}\Gamma$ 加群であるかのように思ってコホモロジー群 $H^{\cdot}(\Gamma,\mathbb{U})$ を計算するための標準複体を仮想し，仮想2コチェイン u のコバウンダリ

(2) $$\delta u(g,h,l) = \alpha_g(u(h,l))\,u(g,hl)\,u(gh,l)^*\,u(g,h)^*$$

を得る．この順（又は等しく，この巡回置換の順）に積をとれば，$\delta u : \Gamma\times\Gamma\times\Gamma \longrightarrow \mathbb{T}$ のようにこれが $\mathbb{T}$ に値をもつ標準3コサイクルであることが知れる．このコホモロジー類が $\mathrm{Obs}(\alpha)$ に他ならない：$\mathrm{Obs}(\alpha) = [\delta u]$．$u$ の選び方は $\mathbb{T}$ に値をもつ $\Gamma\times\Gamma \longrightarrow \mathbb{T}$ による乗法を除けばユニークだが，その違いはコホモロジー類 $[\delta u]$ に影響しない．$\mathrm{Obs}(\alpha)$ が消える，即ち $[\delta u]=0$ となるための必要十分条件は，u を適当な $u' : \Gamma\times\Gamma \longrightarrow \mathbb{U}$ にとり替えて捻り接合積 $R\rtimes_{\alpha,u'}\Gamma$ が得られること，つまり形式和 $\sum_{g\in G} r_g\rtimes g$ $(r_g\in R)$ 全体の集合において

(3) $$(r\rtimes g)(s\rtimes h) = r\alpha_g(s)u'(g,h)\rtimes gh$$

の定める（双加法的）積が結合的であること．こうして $\mathrm{Obs}(\alpha)$ は α が捻り接合積を成すための障害を表す．

特に $\Gamma = \mathbb{Z}_n = \langle g\rangle$（$g$ の生成する位数 n の巡回群）で

あれば，$H^3(\mathbb{Z}_n, \mathbb{T}) \cong \mu_n$（1の n 乗根全体）だから定理 J から全単射

$$\mathrm{Obs} : \mathrm{Out}(\mathbb{Z}_n, \mathcal{R})/\text{外部共役} \xrightarrow{\cong} \mu_n$$

が従う．ここに $\mathrm{Obs}(\alpha)$ はいわゆる Connes障害 $\gamma(\alpha_g)$ に等しい．

§2. Izumi-Kosaki 不変量

おおざっぱに言って，定理 J の，有限群の整合ペアに関する変種が Izumi-Kosaki の結果である．それを述べるため，まず整合ペアについて復習しよう．

有限群 Γ が2つの部分群 F, G に

$$\Gamma = FG, \quad F \cap G = \{e\}$$

を満すという意味で分解しているとする．あるいは，Γ の任意の元が ax $(a \in F, x \in G)$ の形にユニークに書けている，といってもよい．このとき (F, G) は整合ペア [T] をなすといい，$\Gamma = F \bowtie G$ と書く．$x \in G$, $a \in F$ に対し

$$xa = (x \triangleright a)(x \triangleleft a)$$

を満す $x \triangleright a \in F$, $x \triangleleft a \in G$ がユニークに決り，こうして得られる

$$G \xleftarrow{\triangleleft} G \times F \xrightarrow{\triangleright} F$$

は群の集合への作用（$x \triangleleft ab = (x \triangleleft a) \triangleleft b$ とこの鏡映）であ

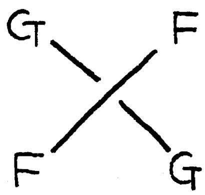
って，

$$xy \triangleleft a = (x \triangleleft (y \triangleright a))(y \triangleleft a)$$

とこの鏡映を満す．これら $\triangleleft$, $\triangleright$ を整合ペアの構造と見做す．後のため注意すると，

$$(x, a) \longmapsto (x \triangleright a, x \triangleleft a), \quad G \times F \longrightarrow F \times G$$

は全単射である．これを次の組紐図で表す．

(4) 

以下，(F, G) を有限群の整合ペア，$\Gamma = F \bowtie G$ とする．整合ペア (F, G) の R への（外部的）作用 [IK] とは，群準同型 $\alpha : F \longrightarrow \mathrm{Aut}(R)$, $\beta : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(R)$ のペア (α, β) であって，これらから定義される

(5) $\alpha\beta : \Gamma = F \bowtie G \longrightarrow \mathrm{Aut}(R)$, $ax \longmapsto \alpha_a \beta_x$ （合成）

が（外部的）捻り作用となるものをいう．2組の作用 (α, β), (α', β') がコサイクル共役 [IK] とは，$\theta \in \mathrm{Aut}(R)$, α コサイクル $u : F \longrightarrow \mathbb{U}$, β コサイクル $v : G \longrightarrow \mathbb{U}$ が存在して

$$\theta \alpha'_a \theta^{-1} = \mathrm{Ad}(u_a)\alpha_a, \quad \theta \beta'_x \theta^{-1} = \mathrm{Ad}(v_x)\beta_x$$

$(a \in F, x \in G)$ を満すことをいう．ここに u が α コサイクル [IK] とは次が成立つことをいう．

$$u_{ab} = u_a \alpha_a(u_b) \quad (a, b \in F).$$

Izumi-Kosaki [IK] は

Out((F,G), R) := {整合ペア (F,G) の R への外部的作用}

のコサイクル共役類を決定した：

<u>定理IK</u>. 次の全単射が存在する.

$$ik : \mathrm{Out}((F,G),R)/\text{コサイクル共役} \xrightarrow{\cong} H^2(\mathrm{Tot}\,E^{\cdot\cdot})$$

[IK]に於いては整合ペアの構造射の一方 $\triangleleft$ が自明であり従って $\Gamma = F \rtimes G$ (半直積) であることが仮定されているが，この仮定は不要である [M2]. ik を <u>Izumi-Kosaki 不変量</u>と呼びたい. この写像を記ぎしよう.

まず ik の像 $H^2(\mathrm{Tot}\,E^{\cdot\cdot})$ は，本質的に Kac [K] による双複体

$$E^{\cdot\cdot} = \begin{tikzcd} \vdots & \vdots & \\ \mathrm{Map}(G^2 \times F, \mathbb{T}) \arrow[u, dotted, "\partial'"] \arrow[r, "\partial"] & \mathrm{Map}(G^2 \times F^2, \mathbb{T}) \arrow[u, dotted, "\partial'"] \arrow[r, "\partial"] & \cdots \\ \mathrm{Map}(G \times F, \mathbb{T}) \arrow[u, "\partial'"] \arrow[r, "\partial"] & \mathrm{Map}(G \times F^2, \mathbb{T}) \arrow[u, "\partial'"] \arrow[r, "\partial"] & \cdots \end{tikzcd}$$

の第2トータルコホモロジー群である. ここに $\mathrm{Map}(G^q \times F^p, \mathbb{T})$ は直積集合 $G^q \times F^p$ から $\mathbb{T}$ への写像全体が成す群を表す. 次の

セクションで示すように，Kac は Kac 代数拡大を記述すべくこの双複体を構成した．群やリー環の拡大と同様，第2コホモロジーが拡大と対応するよう，$E^{\cdot\cdot}$ のトータル次数を

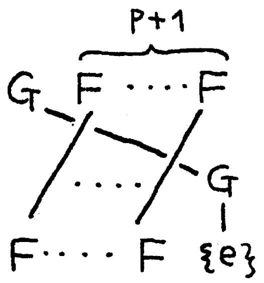
$$\mathrm{Tot}^0 E^{\cdot\cdot} = 0, \quad \mathrm{Tot}^1 E^{\cdot\cdot} = \mathrm{Map}(G\times F, \mathbb{T}),$$

$$\mathrm{Tot}^2 E^{\cdot\cdot} = \mathrm{Map}(G\times F^2, \mathbb{T}) \times \mathrm{Map}(G^2\times F, \mathbb{T}), \cdots$$

のように数える．$E^{\cdot\cdot}$ の構成法はやゝこみ入る．これを示すためまず，

$$B_\cdot(F) = \quad (0 \leftarrow \mathbb{Z} \leftarrow)\ B_0(F) \leftarrow B_1(F) \leftarrow \cdots$$

を F に関する左バー分解（自明左 $\mathbb{Z}F$ 加群 $\mathbb{Z}$ の自由分解）とする．$B_p(F)$ は F^p を左 $\mathbb{Z}F$ 自由基底にもつ．$B_\cdot(F)$ を左 $\mathbb{Z}\Gamma$ 加群の分解にすべく，追加する $\mathbb{Z}G$ の作用 $\mathbb{Z}G\times B_p(F) \longrightarrow B_p(F)$ を標準的 $\mathbb{Z}$ 自由基底上の $G\times F^{p+1} \longrightarrow F^{p+1}$ からくるものとして，**(4)** を用い

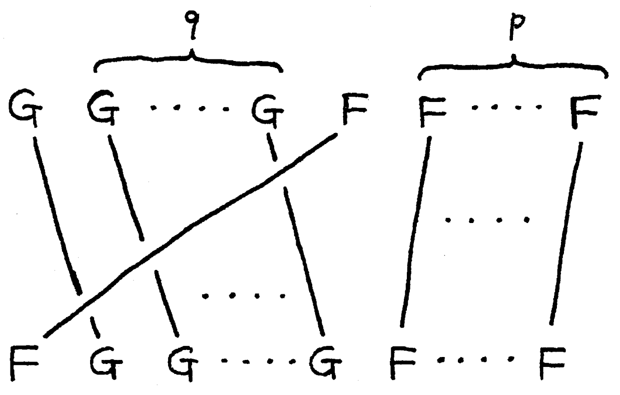


により定義する．次に

$$B'_\cdot(G) = \quad (0 \leftarrow \mathbb{Z}G \leftarrow)\ B'_0(G) \leftarrow B'_1(G) \leftarrow \cdots$$

を G に関する両側バー分解（両側 $\mathbb{Z}G$ 加群 $\mathbb{Z}G$ の自由分解）とする．$B'_q(G)$ は G^q を両側 $\mathbb{Z}G$ 自由基底にもつ．$\mathbb{Z}G$ 上テンソル積 $B'_\cdot(G) \otimes_{\mathbb{Z}G} B_\cdot(F)$ を作り，これを双複体にすべく

バウンダリ作用素の符号を適宜換える（符号トリック）．さらに各チェイン $B'_q(G)\otimes_{\mathbb{Z}G}B_p(F)$ を，$G^q\times F^p$ を自由基底にもつ左 $\mathbb{Z}\Gamma$ 加群 C_{pq} に置き換える．但し，**(4)** を用いて定義される標準的 $\mathbb{Z}$ 自由基底の間の全単射



$(\subset B'_q(G)\otimes_{\mathbb{Z}G}B_p(F))$

$(\subset C_{pq})$

が引起す同型

$$B'_q(G)\otimes_{\mathbb{Z}G}B_p(F)\xrightarrow{\cong}C_{pq}$$

を用いるものとする．こうして得られる双複体 $C_{..}$ のバウンダリ作用素は $\mathbb{Z}\Gamma$ 線形となり，トータル複体 $\mathrm{Tot}\,C_{..}$ は $\mathbb{Z}$ の（非標準的）左 $\mathbb{Z}\Gamma$ 自由分解を与える．Γ に関する左バー分解 $B.(\Gamma)$ との間のホモトピー同値

(6) $\quad \Pi. : B.(\Gamma)\longrightarrow \mathrm{Tot}\,C_{..},\quad \Phi. : \mathrm{Tot}\,C_{..}\longrightarrow B.(\Gamma)$

が [M1] に与えられている．$\Pi.$ はいわゆる Alexander-Whitney 写像（の変種）である．さて，$C_{..}$ に $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\Gamma}(\ ,\mathbb{T})$ を施こし，自然な同一視

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\Gamma}(C_{pq},\mathbb{T})=\mathrm{Map}(G^q\times F^p,\mathbb{T})$$

を用いれば，双複体

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \\
C^{\cdot\cdot} = & \mathrm{Map}(G,\mathbb{T}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Map}(G\times F,\mathbb{T}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \\
 & \mathbb{T} \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Map}(F,\mathbb{T}) \arrow[r] \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

が得られる．これから，最左垂直複体と最下水平複体（それぞれ $H^{\cdot}(G,\mathbb{T})$, $H^{\cdot}(F,\mathbb{T})$ のための標準複体）をとり去ったものが $E^{\cdot\cdot}$ である．

整合ペア (F,G) の作用 (α,β) に対し，その Izumi-Kosaki 不変量 $ik(\alpha,\beta)$ を与えよう．前に Γ の標準複体に対し行った非アーベルホモロジー的操作を，今度は $E^{\cdot\cdot}$ に対し行う．
(5) の捻り作用 $\alpha\beta:\Gamma=F\bowtie G\longrightarrow \mathrm{Aut}(R)$ に対し，(1) のような $\omega:\Gamma\times\Gamma\longrightarrow \mathbb{U}$ を選ぶ．計算して

$$
\begin{aligned}
(\alpha\beta)_{ax}(\alpha\beta)_{by} &= \alpha_a\beta_x\alpha_b\beta_y\\
&= \alpha_a\,\mathrm{Ad}(\omega(x,b))\,\alpha_{x\triangleright b}\,\beta_{x\triangleleft b}\,\beta_y\\
&= \mathrm{Ad}(\alpha_a(\omega(x,b)))\,\alpha_{a(x\triangleright b)}\,\beta_{(x\triangleleft b)y}
\end{aligned}
$$

となるから，

(7) $$\omega(ax,by)=\alpha_a(\omega(x,b))\qquad (a,b\in F,\ x,y\in G)$$

を満すような ω を選べることを注意しておく．

$$\omega_1 := \omega|_{G\times F} : G\times F \longrightarrow \mathbb{U}$$

を仮想 $\mathbb{Z}\Gamma$ 加群 $\mathbb{U}$ に係数をもつコチェインとして，$E^{\cdot\cdot}$（の係数域を $\mathbb{U}$ まで拡張したもの）の水平，垂直コバウンダリを，形式的に

$$\partial\omega_1(x;a,b) = \omega_1(x;a)^* \omega_1(x;ab)\ \alpha_{x\triangleright a}(\omega_1(x\triangleleft a;b))^*,$$

$$\partial'\omega_1(x,y;a) = \omega_1(x;y\triangleright a)\ \omega_1(xy;a)^*\ \beta_x(\omega_1(y;a))$$

と計算すれば，$(\partial\omega_1, \partial'\omega_1)$ は $E^{\cdot\cdot}$（係数域 $\mathbb{T}$）のトータル2コサイクルになる．$ik(\alpha,\beta)$ をそのコホモロジー類

$$ik(\alpha,\beta) = [\partial\omega_1, \partial'\omega_1] \in H^2(\mathrm{Tot}\, E^{\cdot\cdot})$$

として定義する．

ik は先の Obs と密接な関係にある．(6) の $\pi.$ の引起すホモトピー同値を

$$\pi^{\cdot} : \mathrm{Tot}\ C^{\cdot\cdot} \longrightarrow H^{\cdot}(\Gamma,\mathbb{T})\text{ のための標準複体}$$

と書く．自然に $\mathrm{Tot}\ E^{\cdot\cdot} \subset \mathrm{Tot}\ C^{\cdot\cdot}$ と見做せることに注意しよう（但し，両者の次数の数え方にギャップがある）．ω が (7) を満すとは，（$\pi^{\cdot}$ を係数域 $\mathbb{U}$ にまで形式的に拡張して）$\omega = \pi^2(\omega_1)$ を満すということ．(2) の与える $\delta\omega$ は $\delta\omega = \pi^3(\partial\omega_1, \partial'\omega_1)$ を満しており，次頁の可換図形が従う．右側の垂直アローは $\pi^{\cdot}$ の引起す群準同型で，いわゆる Kac 完全列 [K, (3.14)] にも現れる．

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Out}((F,G),\ R) & \xrightarrow{ik} & H^2(\mathrm{Tot}\ E^{\cdot\cdot}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Out}(F \bowtie G,\ R) & \xrightarrow{Obs} & H^3(F \bowtie G,\ \mathbb{T}) \end{array}$$

§3. Kac 代数との結びつき

$H^2(\mathrm{Tot}\ E^{\cdot\cdot})$ が Kac 代数拡大と対応することを説明するため，まず群拡大につき復習しよう．Γ を群，M をアーベル群とする．Γ の M による拡大，即ち群の短完全列 $M \rightarrowtail \Sigma \twoheadrightarrow \Gamma$ は M を $\mathbb{Z}\Gamma$ 加群にする作用 $\mu : \Gamma \times M \longrightarrow M$ をユニークに引起す．M の $\mathbb{Z}\Gamma$ 加群構造 μ をひとつ固定すれば，それを引起すような拡大 $M \rightarrowtail \Sigma \twoheadrightarrow \Gamma$ の同値類全体 $\mathrm{Opext}(\Gamma, M)$ は (M, μ) を係数域にもつコホモロジー群 $H^2(\Gamma, M)$ と1対1に対応する（Opext の接頭 Op は operation μ を固定した，の意）．この対応は 2 コサイクル σ : $\Gamma \times \Gamma \longrightarrow M$ に捻り接合積 $M \rtimes_{\mu,\sigma} \Gamma$ を対応させるものである．

Kac代数について全くパラレルである．F, G を有限群とし，$\mathbb{C}F$ を群環（F の元を群様元 $\Delta(a) = a \otimes a$ にとる），$\hat{G}$ $(= \ell^\infty(G))$ を $\mathbb{C}G$ の双対Kac代数とする．$\mathbb{C}F$ の $\hat{G}$ による Kac 代数拡大 $\hat{G} \rightarrowtail \mathbb{H} \twoheadrightarrow \mathbb{C}F$ は (F, G) の整合ペア構造 $G \xleftarrow{\triangleleft} G \times F \xrightarrow{\triangleright} F$ をユニークに引起す．そのような構

造 $\triangleleft, \triangleright$ を1組固定するとき，それを引起す拡大 $\hat{G} \rightarrowtail \mathcal{H} \twoheadrightarrow \mathbb{C}F$ の同値類全体 $\mathrm{Opext}(\mathbb{C}F, \hat{G})$ は $H^2(\mathrm{Tot}\,E^{\cdot\cdot})$ と1対1に対応する．$\sigma: G\times F\times F \longrightarrow \mathbb{T}$ と $\tau: G\times G\times F \longrightarrow \mathbb{T}$ のなすトータル2コサイクル (σ, τ) in $E^{\cdot\cdot}$ に対応するKac代数 $\mathcal{H}$ は双捩り接合積

$$\mathcal{H} = \hat{G} \#_{\sigma,\tau} \mathbb{C}F.$$

これはベクトル空間として $\hat{G}\otimes\mathbb{C}F$ に等しく，代数として捩り接合積 $\hat{G} \rtimes_{\rightharpoonup,\sigma} F$ に等しい．ここに，捩り作用 $\rightharpoonup$: $F\times\hat{G} \longrightarrow \hat{G}$ は $\triangleleft$ の引起す $(a\rightharpoonup\hat{y})(x) = \hat{y}(x\triangleleft a)$ であり，σ は $F\times F \longrightarrow \hat{G}$, $(a,b)\longmapsto(x\longmapsto\sigma(x;a,b))$ と同一視している $(a, b\in F,\ x\in G,\ \hat{y}\in\hat{G})$．$\mathcal{H}$ は余代数としては，$\triangleright$ の引起す $\leftharpoonup: \hat{F}\times G \longrightarrow \hat{F}$ と τ の与える捩り接合積 $G \ltimes_{\leftharpoonup,\tau} \hat{F}$ の双対である．コサイクル条件のうち，$\partial\sigma = 1$, $\partial'\tau = 1$ はそれぞれ $\mathcal{H}$ が代数，余代数であることを保証し，$(\partial'\sigma)(\partial\tau) = 1$ は2つの構造が両立することを保証する．

(F, G) を有限群の整合ペア，$\Gamma = F\bowtie G$ とする．(F, G) の R への外部的作用 (α, β) が与えられたとする．ここで贔屓により2つに分れる．作用素環びいきであれば不変環と接合積の成す II_1 型部分因子環

(8) $$Q := R^{(\beta, G)} \subset P := R \rtimes_\alpha F$$

を想起するだろうし，ホップ代数びいきであればコホモロジー類 $ik(\alpha,\beta)\in H^2(\mathrm{Tot}\,E^{\cdot\cdot})$ に対応するKac代数，つまりこの類を代表する2コサイクル (σ,τ) の作る

$$(9)\qquad \mathcal{H} := \hat{G}\,\#_{\sigma,\tau}\,\mathbb{C}F$$

を想起するだろう．しかし心配ない！ どちらの道を選ぼうが合流する，つまりこの2つが互いに対応し合っていることを以下のように知るのである．

一般に depth 2 の $\underbrace{\mathrm{II}_1}_{\text{既約な}}$ 型部分因子環 $Q\subset P$ に有限次元Kac代数 $\mathcal{H}$ を対応させるのに，いくつか異った（しかし結局は同等な）方法が知られている（例えば［IK］では乗法的ユニタリを経由している）．最も直接的と思われるのは，$Q\subset P$ を $\mathcal{H}$-Galois拡大にするような $\mathcal{H}$ を対応させるという（おそらく Kadison-Nikshych［KN］による）方法だと思われる．ところで，$Q\subset P$ が $\mathcal{H}$-Galois拡大であるとは，P が右 $\mathcal{H}$ 余加群 $*$ 代数，つまり $*$ 代数射 $\rho: P\longrightarrow P\otimes\mathcal{H}$ が与えられこれにより P が右 $\mathcal{H}$ 余加群であり，

(a) $Q=\{p\in P\mid \rho(p)=p\otimes 1\}$（余不変環），

(b) $p\otimes q\longmapsto p\rho(q)$, $P\otimes_Q P\longrightarrow P\otimes\mathcal{H}$ が全単射

を満すことである．

$Q\subset P$, $\mathcal{H}$ を (8), (9) のとおりとする．P が右 $\mathcal{H}$ 余加群代数であることを示す議論に集中しよう．ひとたびそれが

示されれば，(a), (b) が満されることは標準的議論で従うから．既に与えられている (α, β) に対し，§2 でやったように (7) を満す $\omega : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \mathbb{U}$ をとる．$\{e_x\}_{x \in G}$ in $\hat{G}$ を $\{x\}_{x \in G}$ in $\mathbb{C}G$ の双対基底 $(e_x(y) = \delta_{x,y})$ とすれば，P の構造射 $\rho : P \longrightarrow P \otimes H$ は

$$\rho(r \rtimes a) = \sum_{x \in G} (\beta_x(r)\, \omega(x, a) \rtimes (x \triangleright a)) \otimes (e_x \# a)$$

で与えられる $(r \in R,\ a \in F)$．示したいのは，(P, ρ) が右 H 余加群のなすテンソル圏 $\mathcal{M}^H$ の algebra 対象であること．$\rho : P \longrightarrow P \otimes H$ は，

(10) $$x \cdot (r \rtimes a) = \beta_x(r)\, \omega(x, a) \rtimes (x \triangleright a) \quad (x \in G)$$

の与える G 作用 $G \times P \longrightarrow P$ の随伴 $P \longrightarrow P \otimes \hat{G}$ を，F による自然な次数づけを保つよう $P \otimes H (= P \otimes \hat{G} \otimes \mathbb{C}F)$ まで持ち上げたものである．[M1] にあるように，この様な読み換えを通し，$\mathcal{M}^H$ は次に定義するテンソル圏 ${}_G\mathcal{M}^F_{\sigma,\tau}$ と同一視される．${}_G\mathcal{M}^F_{\sigma,\tau}$ の対象は F 次数つきベク空間 $V = \bigoplus_{a \in F} V_a$ であって，左 G 作用をもち

$$x \cdot v_a \in V_{x \triangleright a}, \quad x \cdot (y \cdot v_a) = \tau(x, y; a)\, xy \cdot v_a$$

を満すもの．テンソル積 $V \otimes W$ は自然な F 次数づけと

$$x \cdot (v_a \otimes w_b) = \sigma(x; a, b)\, x \cdot v_a \otimes (x \triangleleft a) \cdot w_b$$

で与えられる $(x, y \in G,\ v_a \in V_a,\ w_b \in W_b)$．$P = R \rtimes_\alpha F$ が $\mathcal{M}^H$ の algebra 対象であることを見るには，これが自然な F

次数づけと(10)のG作用により${}_G\mathcal{M}^F_{\sigma,\tau}$のalgebra対象であることを見ればよい．これは直接たしかめられるが，(2)の構成と関連づけてもう少しエレガントな解釈ができる．$\phi=\delta\nu$とおく．$\Gamma=F\bowtie G$の次数つきベクトル空間$M,N,L\cdots$全体は，Γの3コサイクルϕを用いて与えられる非自明な結合構造

$$\begin{array}{ccc} M_g\otimes(N_h\otimes L_f) & \xrightarrow{\cong} & (M_g\otimes N_h)\otimes L_f \quad (g,h,f\in\Gamma) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ m_g\otimes(n_h\otimes l_f) & \longmapsto & \phi(g,h,f)(m_g\otimes n_h)\otimes l_f \end{array}$$

によりテンソル圏$\mathcal{M}^{(\Gamma,\phi)}$をなす([M2]では結合構造を逆向きにとっているためϕの替りにϕ^{-1}を用いている)．(5)の$\alpha\beta$とνを用いて(3)に倣い，捻り接合積$R\rtimes_{\alpha\beta,\nu}\Gamma$を形式的に構成すると，これが$\mathcal{M}^{(\Gamma,\phi)}$のalgebra対象であることが容易にたしかめられる．ϕは$G\times G\times G$上自明だから，群環$\mathbb{C}G$もこのテンソル圏のalgebra対象であって，自然に$R\rtimes_{\alpha\beta,\nu}\Gamma$のsubalgebraになっている．これは$R\rtimes_{\alpha\beta,\nu}\Gamma$が，$\mathcal{M}^{(\Gamma,\phi)}$における両側$\mathbb{C}G$加群全体のなすテンソル圏$({}_G\mathcal{M}^{(\Gamma,\phi)}_G,\otimes_{\mathbb{C}G})$のalgebra対象であることを意味する．Schauenburg [S]に依れば，$({}_G\mathcal{M}^{(\Gamma,\phi)}_G,\otimes_{\mathbb{C}G})$と${}_G\mathcal{M}^F_{\sigma,\tau}$は，

$$M\longmapsto M\otimes_{\mathbb{C}G}\mathbb{C}\quad(\mathbb{C}\text{は自明な}\mathbb{C}G\text{加群})$$

によりテンソル同値である．$P=R\rtimes_\alpha F$が$R\rtimes_{\alpha\beta,\nu}\Gamma$に対応する${}_G\mathcal{M}^F_{\sigma,\tau}$のalgebra対象であることが見てとれる．

こうして見ると $\mathcal{M}^{\mathbb{H}}$ に関しても，もう少し一般に3コサイクル $\omega : \mathbb{H}\otimes\mathbb{H}\otimes\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ が与える非自明な結合構造のテンソル圏 $\mathcal{M}^{(\mathbb{H},\omega)}$ を考えるのが自然である．このような $(\mathbb{H},\omega)$（つまり $\mathcal{M}^{(\mathbb{H},\omega)}$ が首尾よくテンソル圏をなす）は余準ホップ代数と呼ばれる．[M2] においては，$\mathbb{C}F$ の $\hat{G}$ による余準ホップ代数拡大（双複体 $C^{\cdot\cdot}$ から最左垂直複体だけをとり去った双複体のトータルコホモロジーで記述される）に関し，定理IKの変種が証明され，それが定理IKの対応を知る上でも有効なことが具体例により示されている．

以上の考察にあたり，また9月の研究集会の折にも山上滋先生に大変お世話になったことを，感謝の気持ちをこめて記させて下さい．

文献

[IK] M. Izumi and H. Kosaki, Kac algebras arising from composition of subfactors, Memoirs Amer. Math. Soc. No. 750, 2002.

[J] V.F.R. Jones, Actions of finite groups on the hyperfinite II_1 factor, Memoirs Amer. Math. Soc. No. 237, 1980.

[K] G. I. Kac, Extensions of groups to ring groups, Math. USSR Sbornik 5 (1968), 451-474.

[KN] L. Kadison and D. Nikshych, Hopf algebra actions on strongly separable extensions of depth two, Adv. Math. 163 (2001), 258-286.

[M1] A. Masuoka, Cohomology and coquasi-bialgebra extensions associated to a matched pair of bialgebras, Adv. Math. 173 (2003), 262-315.

[M2] A. Masuoka, More homological approach to composition of subfactors, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 10 (2003), in press.

[S] P. Schauenburg, Hopf bimodules, coquasibialgebras, and an exact sequence of Kac, Adv. Math. 163 (2002), 194-263.

[T] M. Takeuchi, Matched pairs of groups and bismash products of Hopf algebras, Comm. Algebra 9 (1981), 841-882.